Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos
SEPTIEMBRE 2017

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

28 de junio de 2018

2017

Curso 2016-17

Septiembre 2017

Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y-z & = & -2 \\ -2x-az & = & 2 \\ y+az & = & -2 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=4$.

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array}\right) \implies |A| = 2-3a = 0 \implies a = 2/3$$

- Si $a \neq 2/3 \quad |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\implies$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = 2/3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies$ Sistema Incompatible (No tiene solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 4$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \; F_2 + 2F_1 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \; F_3 \leftrightarrows F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{array}\right) \sim \; F_3 + 4F_2 \; \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x - 2\cdot 2 - (-1) = -2 \\ y + 4\cdot(-1) = -2 \\ 10z = 10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la región del plano S definida por:

$$1 \leq x \leq 5;\; 2 \leq y \leq 6;\; x - y \geq -4;\; 3x - y \leq 10$$

.

a) *Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Calcúlese los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región S y obténgase los puntos de S donde se alcanzan dichos valores.*

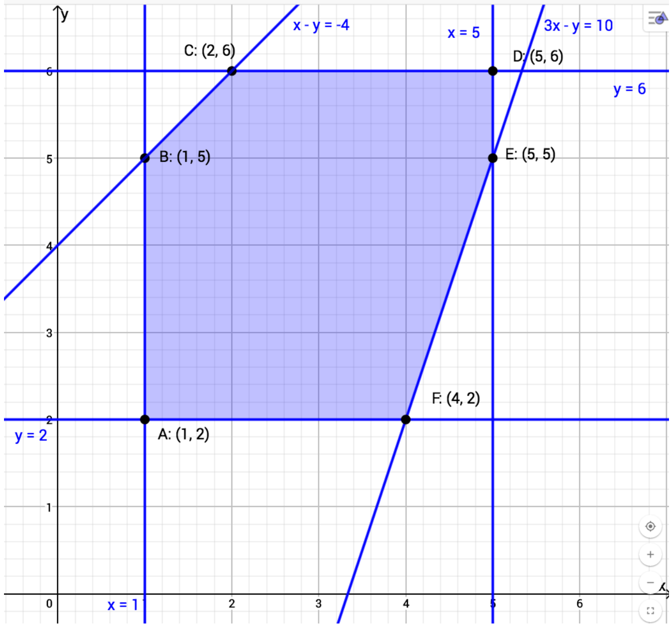
Solución.

- `Funcíón objetivo`
$$f(x, y) = -200x + 600y$$

- `Región S` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 & \to (1, 0) \quad \& \quad (5, 0) \\ 2 \leq y \leq 6 & \to (0, 2) \quad \& \quad (0.6) \\ x - y \geq -4 & \to (0, 4) \quad \& \quad (-4, 0) \\ 3x - y \leq 10 & \to (0, -10) \quad \& \quad (10/3, 0) \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma



- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	f(x,y)
A	1	2	1000
B	1	5	2800
C	2	6	3200
D	5	6	2600
E	5	5	2000
F	4	2	400

Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $C(2,6)$ y vale 3200, mientras que el *mínimo* se produce en $F(4,2)$ y vale 400.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real :

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2+x-2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

a) *Calcúlese el valor del parámetro real a para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.*

b) *Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

Solución.

a)
- Si $x < -1$, $f(x) = ax + 1$, que es continua por ser un polinomio.
- Si $x > -1$, $f(x) = x^2 + x - 2$, que es continua por ser un polinomio.
- Si $x = 1$
  - $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax+1) = -a+1$
  - $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(x^2+x-2\right) = -2$
  - $f(-1) = (-1)^2 - 1 - 2 = -2$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \implies -a+1 = -2 \implies a = 3$$

b) Para $a = 2$ tenemos que $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -1 \\ x^2+x-2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

(1) Puntos de corte con los ejes

- Eje OX

  - $2x+1=0 \implies x = -\frac{1}{2} \nless -1 \implies \nexists$ corte con OX.
  - $x^2+x-2=0 \implies \begin{cases} x=-2 \ngeq -1 \implies \text{No es punto de corte} \\ x = 1 \geq -1 \implies \text{corte en } (1,0) \end{cases}$

- Eje OY
  $x = 0 \implies y = 0^2+0-2 = -2 \implies$ corte en $(0,-2)$

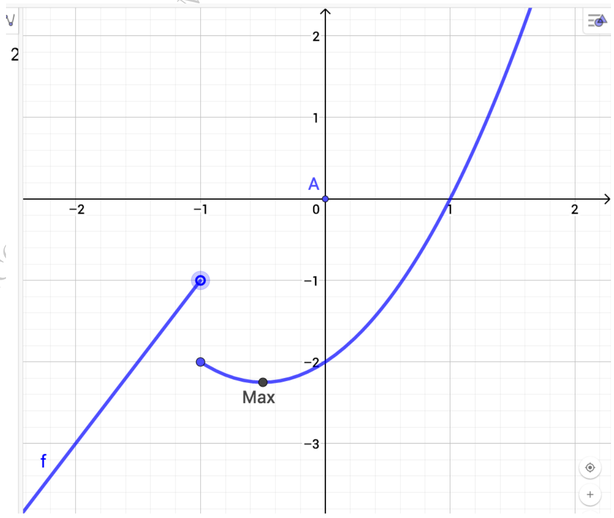
(2) Monotonía de la función $f(x)$.

- Si $x < -1 \Rightarrow f(x) = 2x+1 \implies f'(x) = 2 > 0 \implies$ Recta creciente en $(-\infty, -1)$
- Si $x > -1 \Rightarrow f(x) = x^2+x-2 \implies f'(x) = 2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}$ y como $f''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow (\bigcup) \Rightarrow$ *Mínimo* en $x = -\frac{1}{2}$

Por lo tanto podemos resumir,

$f(x)$ corta al eje OX en $x = 1$ y al eje OY en $y = -2$

$f(x)$ es *decreciente* en $(-1, -\frac{1}{2})$ y *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ y tiene un *mínimo* relativo en $(-1/2, 9/4)$.



Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles A y B, siendo la producción del modelo A el doble que la del modelo B. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo A salga defectuoso es de 0.02, mientras que esa probabilidad en el modelo B es de 0.06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador

a) No salga defectuoso.

b) Sea del modelo A, si se sabe que ha salido defectuoso.

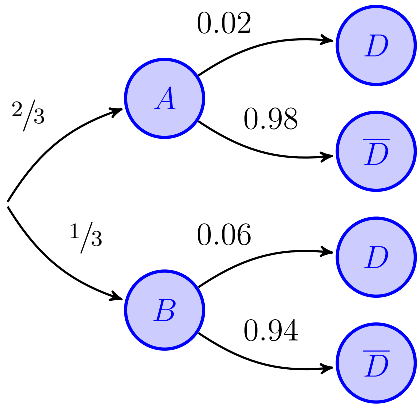
Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ El ordenador es del modelo A
$B \equiv$ El ordenador es del modelo B
$D \equiv$ El ordenador es defectuoso

Para rellenar el árbol el mayor problema lo encontramos en, elegido un ordenador al azar, calcular la probabilidad de que sea del modelo A. Para ello, supondremos que la producción del modelo B es x, por lo que la del modelo A será el doble, $2x$, lo que da una producción total de $3x$. Así:

$$P(A) = \frac{\text{Nº ordenadores mod. A}}{\text{Total ordenadores}} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$



$$\text{a)}P(\overline{D}) = P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D})$$
$$= P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B)$$
$$= \frac{2}{3} \cdot 0.98 + \frac{1}{3} \cdot 0.94 = 0.967$$

$$\text{b)}\ P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{1 - P(\overline{D})}$$
$$= \frac{{}^2\!/\!_3 \cdot 0.02}{1 - 0.967} = 0.404$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16, calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo $\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24.24, 47.76)$ para μ.

Solución.

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 24) \quad \xrightarrow{n=16} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(36, {}^{24}\!/\!_{\sqrt{16}} = 6)$$

$$P\big(\overline{X} \geq 48\big) = P\left(Z \geq \frac{48-36}{6}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2)$$
$$= 1 - 0.9772 = 0.0228$$

b) $$I.C. = (24.24, 47.76) \implies 2\varepsilon = 47.76 - 24.24 \implies \varepsilon = 11.76$$
$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \implies 11.76 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{24}{\sqrt{16}} \implies z_{\alpha/2} = 1.96 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/\!_2 = 0.975$$
$$\implies {}^{\alpha}\!/\!_2 = 0.025 \implies \alpha = 0.05 \implies 1 - \alpha = 0.95$$

Por lo que el nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza en cuestión es del 95 %.

Septiembre 2017
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínese la matriz C^{40}.

b) Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$.

Solución.

a)
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
- $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$
- $C^3 = C \cdot C^2 = C \cdot I = C$
- $C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$

b)

$$X \cdot A + 3B = C$$
$$X \cdot A = C - 3B$$
$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = (C - 3B) \cdot A^{-1}$$
$$X = (C - 3B) \cdot A^{-1}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, y se puede comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$.

$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

De esta forma

$$X = (C - 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

a) *Estúdiense sus asíntotas.*

b) *Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.*

Solución.

a)
- `A.Horizontal` $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x-2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$

- `A.Oblícua` Haciendo la división $f(x) = \dfrac{x^2-1}{3x-2}$ obtenemos la A. Oblicua $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{9}$.
  También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx+n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x^2-1}{3x^2-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{3}$$
$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{x^2-1}{3x-2} - \frac{1}{3}x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{9x-6} = \frac{2}{9}$$

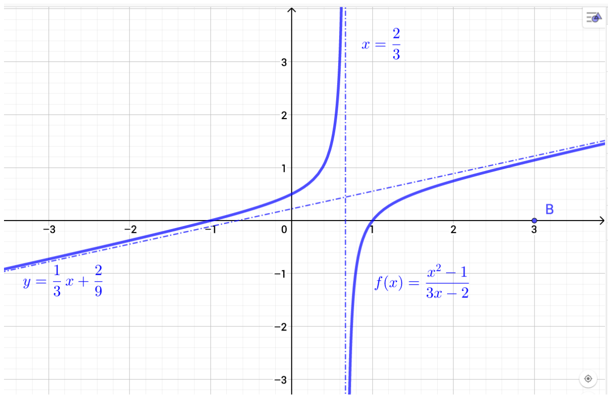
- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $3x-2=0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2/3} f(x) = \left[\frac{-5/9}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 2/3^-} \frac{x^2-1}{3x-2} = \left[\frac{-5/9}{0^-}\right] = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2/3^+} \frac{x^2-1}{3x-2} = \left[\frac{-5/9}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

b) Para estudiar la monotonía de la función hallamos los puntos singulares y el signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x(3x-2)-3(x^2-1)}{(3x-2)^2} = \frac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2} = 0 \Rightarrow 3x^2-4x+3=0 \Rightarrow \nexists \text{ sol.}$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0\ \forall x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right) & \textit{Creciente} \\ f'(x) < 0\ \forall x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) & \textit{Dereciente} \end{cases}$$



Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + ax$$

a) *Calcúlese el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ tenga un extremo* *relativo en $x = 2$. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.*

b) Para $a = -2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución.

a) Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$, $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x + a \implies f'(2) = 4 + a = 0 \implies a = -4$$
$$f''(x) = 2 \implies f''(2) = 2 > 0 \implies (\cup)\ \textit{Mínimo}$$

b) Hallamos los puntos de corte con el eje X.
$x^2 - 2x = 0 \implies x(x-2) = 0 \implies x = \{0, 2\}$.

$$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0) = -\frac{4}{3}$$
$$A_{tot} = |A_1| = \frac{4}{3}\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0.6, por sulfatos es 0.4, y por ambos es 0.2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

Solución.

Sean los sucesos: $\begin{cases} N & \equiv \text{El río está contaminado por nitratos} \\ S & \equiv \text{El río está contaminado por sulfatos} \end{cases}$

$$P(N) = 0.6 \quad \& \quad P(S) = 0.4 \quad \& \quad P(N \cap S) = 0.2$$

a) $P(\overline{N} \mid S) = \dfrac{P(\overline{N} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.4 - 0.2}{0.4} = 0.5$

b) $P(\overline{N} \cap \overline{S}) = P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - [P(N) + P(S) - P(N \cap S)]$
$= 1 - (0.6 + 0.4 - 0.2) = 0.2$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0.6$ cm.

a) *Una muestra aleatoria simple de* 100 *individuos proporcionó una media muestral* $\overline{X} = 7$ *cm. Calcúlese un intervalo de confianza al* 98 % *para* μ.

b) *¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de* μ *por la media muestral sea a lo sumo de* 0.1 *cm, con un nivel de confianza del* 98 %*?*

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.6) \overset{n=100}{\longrightarrow} \overline{X} = 7$

$$1 - \alpha = 0.98 \implies \alpha = 0.02 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.01 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.99 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{100}} = 0.1395$$

$$I.C. = \overline{X} \pm \varepsilon = 7 \pm 0.1395 = (6.8605, 7.1395)$$

b) $n = ?$ $\quad \varepsilon \leq 0.1 \quad 1 - \alpha = 0.98 \implies z_{\alpha/2} = 2.325$

$$\varepsilon \leq 0.1 \implies \varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{0.6}{\sqrt{n}} \leq 0.1 \implies n \geq \left(2.325 \cdot \frac{0.6}{0.1}\right)^2$$

$$\implies n \geq 194.6 \implies \boxed{n = 195}$$