

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS
EXÁMENES RESUELTOS
JUNIO 2017

[HTTP://APRENDECONMIGOMELON.COM](http://aprendeconmigelon.com)
Iñigo Zúñunegui Monterrubio

28 de junio de 2018

Ejercicio 1 (2 puntos)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.
- Determinése para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.
- Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1} ?

Solución.

- a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = 2 - 2k^2 = 0 \implies k = \pm 1$$

- Si $k \neq \{-1, 1\} \implies \exists A^{-1}$
- Si $k = \{-1, 1\} \implies \nexists A^{-1}$

- b) Para $k = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 2 - 2 \cdot 0^2 = 2$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \underbrace{A^{-1}A}_I X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 6 = 12 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 6y \geq 6; 5x - 2y \geq -2; x + 3y \leq 20; 2x - y \leq 12\}$$

- Representétese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
- Determinéense los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S , indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.

Solución.

- Función objetivo

$$f(x, y) = 4x - 3y$$

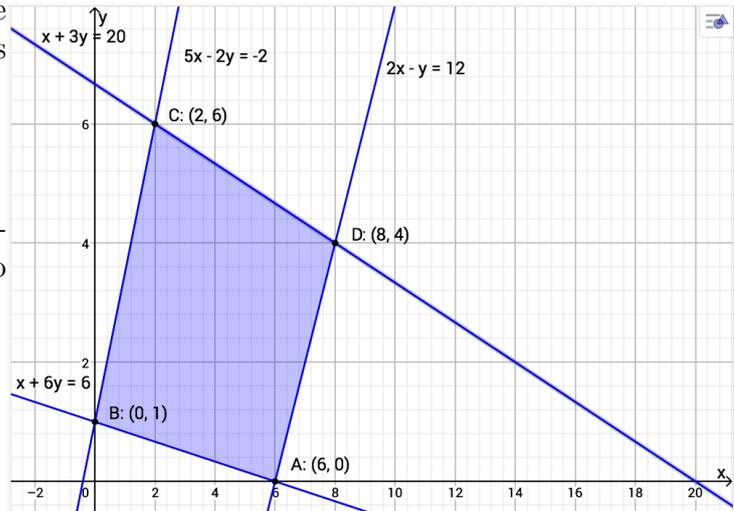
- Región S Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

$$S = \begin{cases} x + 6y \geq 6 & \rightarrow (0, 1) \quad \& \quad (6, 0) \\ 5x - 2y \geq -2 & \rightarrow (0, 1) \quad \& \quad (-0.4, 0) \\ x + 3y \leq 20 & \rightarrow (0, 20/3) \quad \& \quad (20, 0) \\ 2x - y \leq 12 & \rightarrow (0, -12) \quad \& \quad (6, 0) \end{cases}$$

- Región factible Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- Optimización de la función objetivo Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	f(x,y)
A	6	0	24
B	0	1	-3
C	2	6	-10
D	8	4	20



Por tanto el *máximo* de la función objetivo se produce en el punto $A(6, 0)$ y vale 24, mientras que el *mínimo* se produce en $C(2, 6)$ y vale -10 .

Ejercicio 3 (2 puntos)

- Determinése el valor de la derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$.

Solución.

$$a) f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{e^x(1+x-1)}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2} \implies f'(0) = 0$$

$$b) \quad \blacksquare \text{ A. Horizontal } y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \mp\infty \Rightarrow \nexists \text{ A.H.}$$

- A. Oblicua** Haciendo la división $\frac{x^3}{1-x^2}$ obtenemos la A. Oblicua $y = -x$. También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx + n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x - x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

- A. Vertical** $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty \end{cases}$$

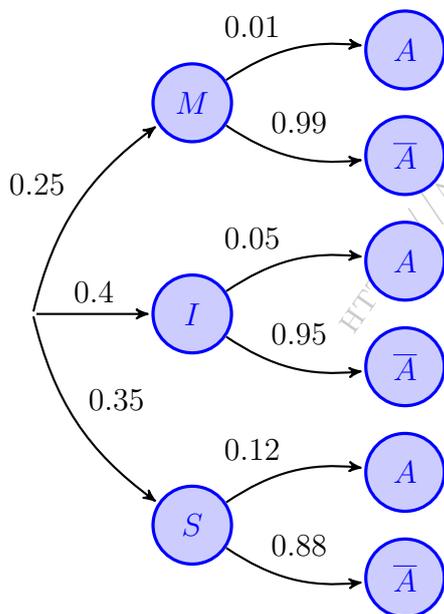
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \left[\frac{-1}{0} \right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty \end{cases}$$

Ejercicio 4 (2 puntos)

Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0.01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0.05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0.12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

- a) Se estropee.
- b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Solución.



a) Sean los sucesos:

- $M \equiv$ Antigüedad < 2 años
- $I \equiv$ 2 < Antigüedad < 4 años
- $S \equiv$ Antigüedad > 4 años
- $E \equiv$ La furgoneta se estropea
- $\bar{E} \equiv$ La furgoneta no se estropea

$$\begin{aligned} P(E) &= P(M \cap E) + P(I \cap E) + P(S \cap E) \\ &= P(M) \cdot P(E | M) + P(I) \cdot P(E | I) \\ &\quad + P(S) \cdot P(E | S) = 0.25 \cdot 0.01 \\ &\quad + 0.4 \cdot 0.05 + 0.35 \cdot 0.12 = 0.0645 \end{aligned}$$

b)
$$P(S | \bar{E}) = \frac{P(S \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{P(S) \cdot P(\bar{E} | S)}{1 - P(E)} = \frac{0.35 \cdot 0.88}{1 - 0.0645} = 0.329$$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0.9 kg.

- a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $\bar{X} = 7.8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99.2% para μ .
- b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95% tenga una amplitud a lo sumo de 0.2 kg.

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.9) \xrightarrow{n=324} \bar{X} = 7.8$

$$1 - \alpha = 0.992 \implies \alpha = 0.008 \implies \alpha/2 = 0.004 \implies 1 - \alpha/2 = 0.996 \implies z_{\alpha/2} = 2.65$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.65 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{324}} = 0.1325 \implies I.C. = \bar{X} \pm \varepsilon = 7.8 \pm 0.1325 = (7.67, 7.93)$$

b) $X : \mathcal{N}(\mu, 0.9) \xrightarrow{n=?} 2\varepsilon = 0.2$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$2\varepsilon \leq 0.2 \implies 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies 2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.9}{\sqrt{n}} \leq 0.2 \implies n \geq \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{0.9}{0.2}\right)^2$$

$$\implies n \geq 311.17 \implies \boxed{n = 312}$$

————— o —————

Junio 2017

OPCIÓN B

Ejercicio 1 (2 puntos)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{aligned} x - ay + 2z &= 0 \\ ax - 4y - 4z &= 0 \\ (2 - a)x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- a) *Discútase en función de los valores del parámetro a .*
 b) *Resuélvase para $a = 3$.*

Solución.

- a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \implies |A| = -6a^2 + 6a + 36 = 0 \implies \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-2, 3\}$ $|A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única $x = 0, y = 0, z = 0$).

- Si $a = -2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^\circ \text{ incóg.} \implies$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq n^\circ \text{ incóg.} \implies$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- b) Resolvemos el sistema para $a = 3$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \end{array} \right) \sim F_2 - 3F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x - 6\lambda + 2\lambda &= 0 \\ \Rightarrow 5y - 10t &= 0 \\ z &= \lambda \end{aligned} \implies \boxed{\begin{aligned} x &= 4\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2 (2 puntos)

Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

a) Calcúlense $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1 - x^3}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución.

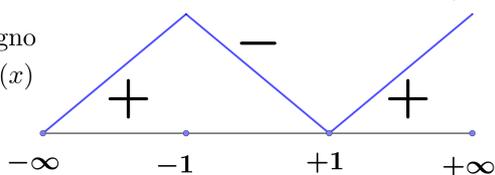
a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 3x}{1 + x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{-1}{1} = -1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - 3)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3) = -3 \end{aligned}$$

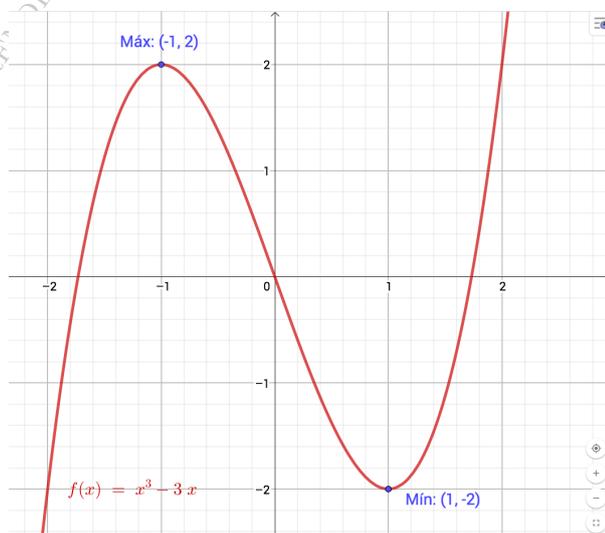
b) Para estudiar el crecimiento de la función hallamos los puntos singulares de la misma y hacemos un estudio del signo de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm 1$$

signo
 $f'(x)$



Luego $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y *decreciente* en $(-1, 1)$ y tiene un *máximo* en $(-1, 2)$ y un *mínimo* en $(1, -2)$



Ejercicio 3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estúdiense la continuidad de $f(x)$ en \mathbb{R} .

$$b) \text{ Calcúlese } \int_{-1}^0 f(x) dx.$$

Solución.

- a) ■ Si $x < 0$, $f(x) = \frac{2}{x+2}$ que es continua en $\mathbb{R} - \{-2\}$.
 ■ Si $x > 0$, $f(x) = x + 2$, que es continua por ser un polinomio.
 ■ Si $x = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x+2} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2 = 2$$

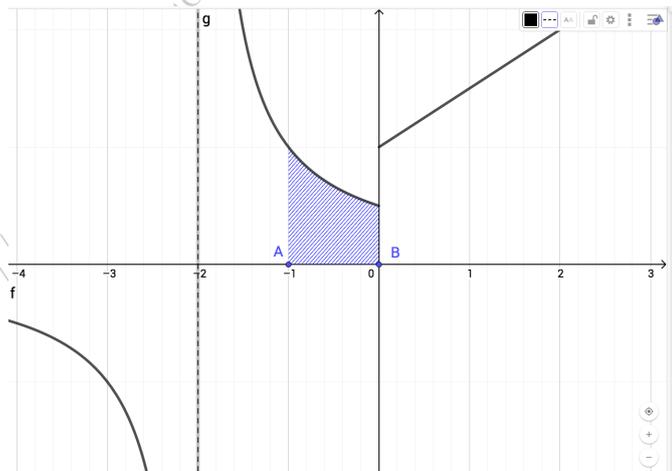
$$\bullet f(0) = \frac{2}{0+2} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \implies f(x)$ no es continua en $x = 0$, donde existe una discontinuidad de salto finito.

Por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

- b) Para el cálculo de la integral tenemos que determinar cuál es expresión de $f(x)$ entre los límites de integración $x = -1$ y $x = 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 \frac{2}{x+2} dx \\ &= 2 \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2} dx \\ &= 2 \ln|x+2| \Big|_{-1}^0 \\ &= \ln(x+2)^2 \Big|_{-1}^0 \\ &= (\ln 4) - (\ln 1) \\ &= \ln 4 \end{aligned}$$



Ejercicio 4 (2 puntos)

El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0.20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0.9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

- a) No lea prensa al menos una vez por semana.
 b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Solución.

Sean los sucesos: $\begin{cases} J & \equiv \text{Ser joven} \\ S & \equiv \text{Leer prensa al menos una vez a la semana} \end{cases}$

$$P(J) = 0.3 \quad \& \quad P(S | J) = 0.2 \quad \& \quad P(\bar{J} | S) = 0.9$$

a) Hallar $P(\bar{S})$

$$P(S | J) = 0.2 \implies \frac{P(S \cap J)}{P(J)} = \frac{P(S \cap J)}{0.3} = 0.2 \implies P(S \cap J) = 0.06$$

$$P(\bar{J} | S) = 0.9 \implies \frac{P(\bar{J} \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S) - P(S \cap J)}{P(S)} = \frac{P(S) - 0.06}{P(S)} = 0.9$$

$$\implies 0.1P(S) = 0.06 \implies P(S) = 0.6 \implies P(\bar{S}) = 0.4$$

b) $P(\bar{S} \cup \bar{J}) = P(\overline{S \cap J}) = 1 - P(S \cap J) = 1 - 0.06 = 0.94$

Ejercicio 5 (2 puntos)

El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.

- a) Si la media de la muestra es $\bar{X} = 25.9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90% para μ .
- b) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 3) \xrightarrow{n=484} \bar{X} = 25.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{3}{\sqrt{484}} = 0.2243 \implies I.C. = \bar{X} \pm \varepsilon = 25.9 \pm 0.2243 = (25.68, 26.12)$$

b) $X : \mathcal{N}(23, 3) \xrightarrow{n=484} \bar{X} : \mathcal{N}(23, 3/\sqrt{484} = 0.136)$

Nos piden la probabilidad de que los 484 contenedores puedan ser transportados en un barco con capacidad máxima de 11000 T. Es decir, $484 \cdot \bar{X} \leq 11000$, o lo que es lo mismo, que $\bar{X} \leq 22.73$ T.

$$P(\bar{X} \leq 22.73) = P\left(Z \leq \frac{22.73 - 23}{0.136}\right) = P(Z \leq -1.98) = P(Z \geq 1.98)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0239$$