Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

a) *Calcúlense el dominio y las asíntotas de* $f(x)$.

b) *Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2018 - Opción B)

Solución.

a)
- $x+1=0 \implies x=-1 \implies \text{dom(f)} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- `A.Horizontal` $y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$

- `A.Oblícua` Haciendo la división $\dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$ obtenemos la recta $y = x-2$.
  También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx+n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\cdot(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-(x^3+2x^2+x)}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2-x}{(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -2$$

- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-1$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

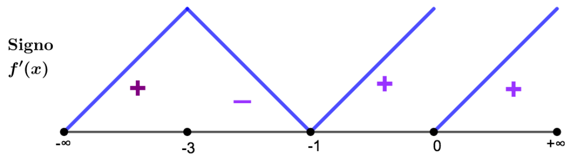
b) Para hallar los puntos singulares haremos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x^2\cdot\left(x^2+4x+3\right) = 0 \Rightarrow x = \{-1,\ -3,\ 0\}$$

Para evaluar el signo de $f'(x)$ suele ser útil factorizar la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{x^2\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x+3)}{(x+1)^{\cancel{4}3}} = \frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}$$



La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ y *decreciente* en $(-3, -1))$ y tiene un *máximo* en $x = -3$.