Matemáticas aplicadas a las CCSS
Exámenes resueltos
MODELO 2018

Iñigo Zunzunegui Monterrubio

25 de junio de 2018

2018

Curso 2017-18

Modelo 2018
Opción A

+++

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ *dependiente del parámetro real* a.

a) Determínese los valores de a *para los que la matriz* A *es invertible.*

b) Para $a = 1$, *despéjese y determínese la matriz* X *de la ecuación matricial* $A \cdot X = A + 2I$, *donde* I *representa la matriz identidad de orden 3.*

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$| A |= 2a^3 \neq 0 \implies a \neq 0$$

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $| A |= 2 \cdot 1^3 = 2$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = A + 2I$$
$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}(A + 2I)$$
$$X = A^{-1}(A + 2I) = \underbrace{A^{-1}A}_{I} + A^{-1}2I = I + 2A^{-1}I$$
$$X = I + 2A^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|\,A\,|}\text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = I + 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una bodega desea fijar el precio de venta al público de las 250 botellas de vino blanco y de las 500 de vino tinto que tiene en stock. Para no incurrir en pérdidas saben que el precio de venta al público de la botella de vino blanco debe ser como mínimo de 3 euros, de la misma manera el precio de venta al público de la botella de vino tinto debe ser de, como mínimo, 4 euros. Además saben que, para ser competitivos con esos precios de venta al público el coste de 2 botellas de vino blanco y una de tinto debería ser a lo sumo 15 euros. Por el mismo motivo, el coste total de una botella de vino blanco y una de tinto no debe sobrepasar los 10 euros.
Determínense los respectivos precios de venta al público por unidad de las botellas de vino blanco y de las de vino tinto, para que el ingreso total al vender el stock de 250 botellas de vino blanco y 500 de vino tinto sea máximo.

Solución.

- `Incógnitas`

$$x = \text{Precio del vino blanco (€)}$$
$$y = \text{Precio del vino tinto (€)}$$

- `Función objetivo`

$$f(x, y) = 250x + 500y$$

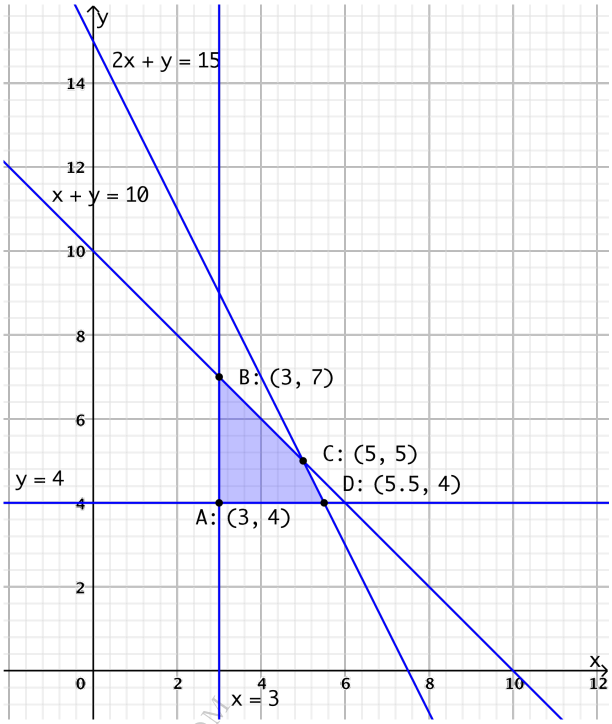
- `Restricciones` Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

$$\begin{cases} x \geq 3 & \rightarrow (3,0) \\ 0 \leq y \geq 4 & \rightarrow (0,4) \\ x + y \leq 10 & \rightarrow (0,10) \quad \& \quad (10,0) \\ 2x + y \leq 15 & \rightarrow (0,15) \quad \& \quad (7.5,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

Punto	x	y	f(x,y)
A	3	4	2750
B	3	7	4250
C	5	5	3750
D	5.5	4	3375



Luego el ingreso máximo de 4250€ se produce con un precio del vino blanco de 3€ y un precio de vino tinto de 7€

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16.$$

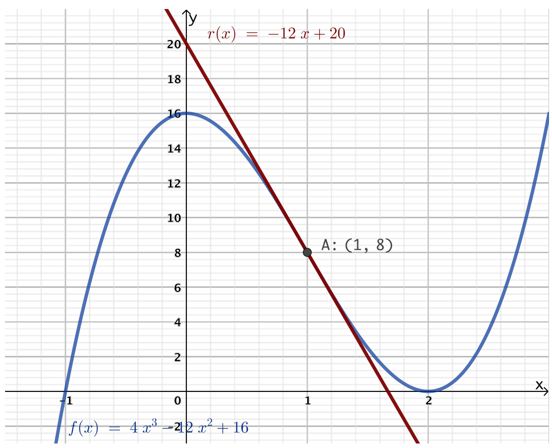
a) *Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.*

b) *Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.*

Solución.

a) El punto de tangencia es $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(1) = 8$

$$f'(x) = 12x^2 - 24x$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(1) = -12$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - 8 = -12 \cdot (x - 1)$$
$$r \equiv y = -12x + 20$$



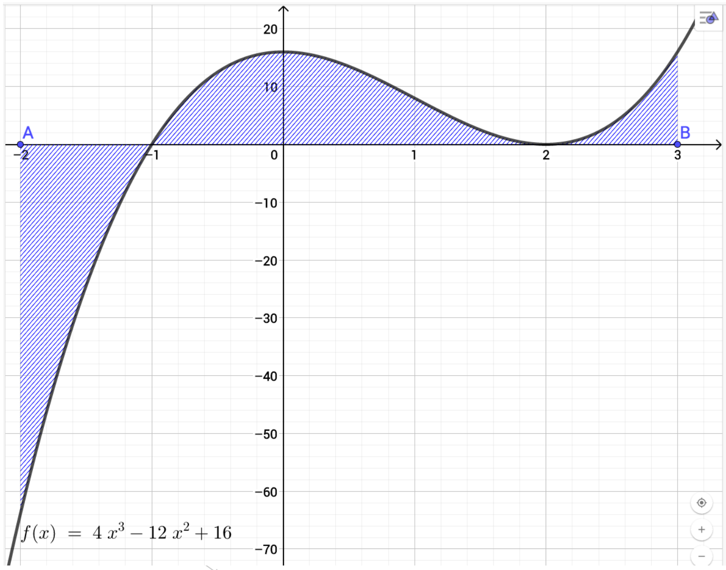
b) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$$4x^3 - 12x^2 + 16 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -12 & 0 & 16 \\ -1 & & -4 & 16 & -16 \\ \hline & 4 & -16 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot 16}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm 0}{8} = 2\ d$$

Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x = -1$ y $x = 2$, planteamos el área teniendo en cuenta que nos piden que esté comprendida entre las rectas $x = -2$ y $x = 3$, por lo que A_1 estará comprendida en el intervalo $(-2, -1)$, A_2 en $(-1, 2)$ y A_3 en $(2, 3)$.



$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (4x^3 - 12x^2 + 16)\,dx = x^4 - 4x^3 + 16x \Big]_{-2}^{-1} \\ &= (1 + 4 - 16) - (16 + 32 - 32) = -11 - 16 = -27 \\ A_2 &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (4x^3 - 12x^2 + 16)\,dx = x^4 - 4x^3 + 16x \Big]_{-1}^{2} \\ &= (16 - 32 + 32) - (1 + 4 - 16) = 16 + 11 = 27 \\ A_3 &= \int_{2}^{3} f(x)\,dx = \int_{2}^{3} (4x^3 - 12x^2 + 16)\,dx = x^4 - 4x^3 + 16x \Big]_{2}^{3} \\ &= (81 - 108 + 48) - (16 - 32 + 32) = 21 - 16 = 5 \\ A_{Total} &= |A_1| + |A_2| + |A_3| = 27 + 27 + 5 = 59\ u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.4 \qquad P(B) = 0.5 \qquad P(A \mid B) = 0.7$$

. Calcúlese:

a) $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A} \mid B)$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución.

a) Hallar $P(A \cup B)$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.7 \implies P(A \cap B) = 0.7 \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 0.4 + 0.5 - 0.35 = 0.55$

b) $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.5 - 0.35}{0.5} = 0.3$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Un determinado partido político desea estimar la proporción de votantes, p, que actualmente se decantaría por él.

a) Asumiendo que $p = 0.5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de votantes para garantizar que, con una confianza del $90\,\%$, el margen de error en la estimación no supera el $2\,\%$ ($\pm 2\,\%$).

b) Se tomó una muestra aleatoria simple de 1200 votantes de los cuales 240 afirmaron que votarían por el partido en cuestión. Obténgase un intervalo de confianza del $95\,\%$ para la proporción de votantes de ese partido en la población.

Solución.

Hay que darse cuenta de que estamos manejando proporciones, por lo que la fórmula del intervalo de confianza es la siguiente:

$$I.C. = \hat{p} \pm \varepsilon, \text{ siendo el error } \varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

a) Hallar el mínimo n de tal forma que $\varepsilon \leq 0.02$, siendo $1 - \alpha = 0.90$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies \alpha/2 = 0.05 \implies 1 - \alpha/2 = 0.95 \implies z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$\varepsilon \leq 0.02 \implies z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \leq 0.02 \implies 1.645\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \leq 0.02$$

$$\implies n \geq \left(\frac{1.645 \cdot 0.5}{0.02}\right)^2 = 1691.27 \text{ y por tanto } \boxed{n = 1692}$$

b)

$$\hat{p} = \frac{240}{1200} = 0.2 \implies \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.8$$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025 \implies 1 - \alpha/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{1200}} = 0.023 \implies I.C. = \hat{p} \pm \varepsilon = (0.1774, 0.2226)$$

2018 Modelo
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ 2x+y+z & = & 2 \\ 5x+3y+z & = & a+4 \end{array}\right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=1$.

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & a+4 \end{array}\right) \Longrightarrow |A|=2$$

- $\boxed{\forall a\in\mathbb{R}}$ $\quad |A|\neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A=3=\text{ran}A^{*}=\text{n}^{\text{o}}$ incóg. $\Longrightarrow$ Sist. Comp. Det.

b) Resolvemos el sistema para $a=1$ por el método de Gauss.

$$A/A^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} F_2-2F_1 \\ F_3-5F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -10 \end{array}\right) \sim \quad F_3-2F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} x+3+1=3 \\ -y-1=-4 \\ -2z=-2 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=-1 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{3x^2+3}{x}$.

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

a)
- $\text{dom(f)}=\mathbb{R}-\{0\}$

- `A.Horizontal` $\quad y = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$
- `A.Oblícua` Haciendo la división $\frac{3x^2+3}{x}$ obtenemos la A. Oblícua $y = 3x$. También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx + n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 3$$
$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3}{x} - 3x = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+3-3x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

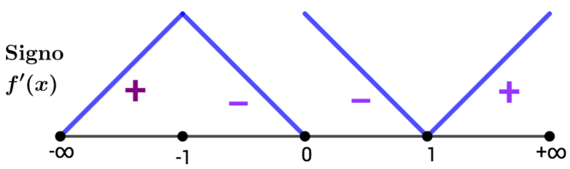
- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$

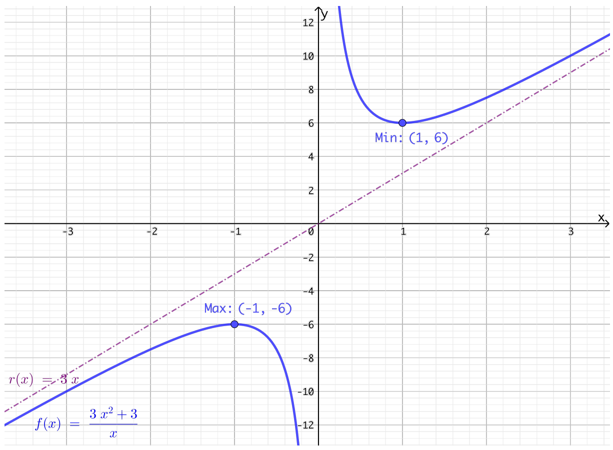
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{3}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3x^2+3}{x} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

b) Para hallar los puntos singulares haremos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{6x \cdot x - (3x^2+3)\cdot 1}{x^2} = \frac{3x^2-3}{x^2} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Para evaluar el signo de $f'(x)$ suele ser útil factorizar $f'(x) = \dfrac{3(x+1)(x-1)}{x^2}$





La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y *decreciente* en $(-1,0)\cup(0,1)$ y tiene un *máximo* en $(-1,-6)$ y un *mínimo* en $(1,6)$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

donde x expresa las toneladas de cemento producidas al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0,8]$.

a) Calcúlense $f(0)$ y $f(8)$ e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.

b) Determínese entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

Solución.

a)
- $f(0) = -12$ que significa que si no producimos ninguna tonelada de cemento tendremos unas pérdidas de 12000 €.
- $f(8) = -28$ que se interpreta como que si producimos 8 toneladas de cemento tendremos unas pérdidas de 28000 € debido a las ineficiencias de la sobreproducción (contratación de horas extraordinarias, problemas logísticos de almacenaje...).

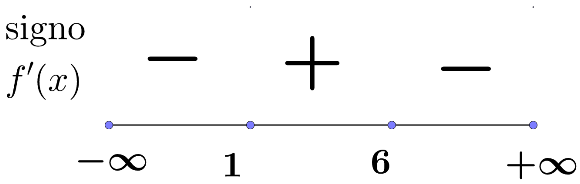
Para calcular el máximo beneficio tenemos que optimizar la función $f(x)$. Para ello hallaremos los puntos singulares de la misma y hallaremos el máximo, comprobando posteriormente que éste no sea menor que los extremos de la función $f(0)$ y $f(8)$.

$$f'(x) = -4x + 14 = 0 \implies x = 7/2.$$
$$f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow \left(\bigcap\right) \Rightarrow \text{Máximo.}$$

El máximo beneficio es de $f(7/2) = 12500$ € que se obtiene con una producción de 3.5 toneladas de cemento.

b) Establecer entre qué valores debe estar la producción de cemento para que la empresa no tenga pérdidas es tanto como estudiar el signo de la función $f(x)$.

$$f(x) = -2x^2+14x-12 = 0 \implies x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-14 \pm 10}{-4} = \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$



Luego la producción de cemento deberá estar entre $[1, 6]$ toneladas para que la empresa no tenga pérdidas.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0.3 \qquad P(B) = 0.8 \qquad P(A \cup B) = 0.9$$

. Calcúlese:

a) $P(\overline{A} \mid B)$.

b) $P(A \mid \overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Solución.

a) $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$\Longrightarrow\ P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.3+0.8-0.9=0.2$$

$$P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.8-0.2}{0.8}=0.75$$

b) $$P(A\mid \overline{B})=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0.3-0.2}{1-0.8}=0.5$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma=3$ kilogramos.

a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

$$37,\ 40,\ 42,\ 39,\ 41,\ 40,\ 39,\ 42,\ 40$$

b) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 99 %.

Solución.

a) $$X:\ \mathcal{N}(\mu,3)\quad \overset{n=9}{\longrightarrow}\quad \overline{X}=\frac{37+40+42+39+41+40+39+42+40}{9}=40$$

$$1-\alpha=0.95\Longrightarrow \alpha=0.05\Longrightarrow \alpha/2=0.025\Longrightarrow 1-\alpha/2=0.975\Longrightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$
$$\varepsilon=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{3}{\sqrt{9}}=1.96\Longrightarrow I.C.=\overline{X}\pm\varepsilon=(38.04,41.96)$$

b) Hallar el mínimo n de tal forma que $\varepsilon\le 1$, siendo $1-\alpha=0.99$

$$1-\alpha=0.99\Longrightarrow \alpha=0.01\Longrightarrow \alpha/2=0.005\Longrightarrow 1-\alpha/2=0.995\Longrightarrow z_{\alpha/2}=2.325$$
$$\varepsilon<1\Longrightarrow z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le 1\Longrightarrow 2.325\cdot\frac{3}{\sqrt{n}}\le 1\Longrightarrow n\ge\left(2.325\cdot\frac{3}{1}\right)^2=48.65$$
y por tanto $\boxed{n=49}$
