# Matemáticas aplicadas a las CCSS
# Exámenes resueltos
# JUNIO 2018



Iñigo Zunzunegui Monterrubio

25 de junio de 2018

# 2018

**Curso 2017-18**

# 2018 Junio
## Opción A

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Se consideran las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

*a) Compruébese que $B$ es la matriz inversa de $A$.*

*b) Calcúlese la matriz $X$ tal que $A \cdot X = B$.*

**Solución.**

a) $B$ es matriz inversa de $A \iff B \cdot A = A \cdot B = I$
Es importante la comprobación de los dos productos pues el hecho de que el producto de matrices no sea conmutativo así nos lo exige.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $A \cdot X = B \implies \underbrace{B \cdot A}_{I} \cdot X = B \cdot B \implies X = B^2$

$$X = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$$

---

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

*Sea $S$ la región del plano definida por:*

$$x + y \leq 50, \qquad 2x + y \leq 80, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0.$$

a) *Represéntese la región $S$ y calcúlense las coordenadas de sus vértices.*

b) *Obténgase el valor máximo de la función $f(x,y) = 5x + 4y$ en la región $S$, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.*

**Solución.**

- `Función objetivo`

$$f(x,y) = 5x + 4y$$

- `Restricciones` Escribimos las restricciones del problema y los puntos necesarios para su representación

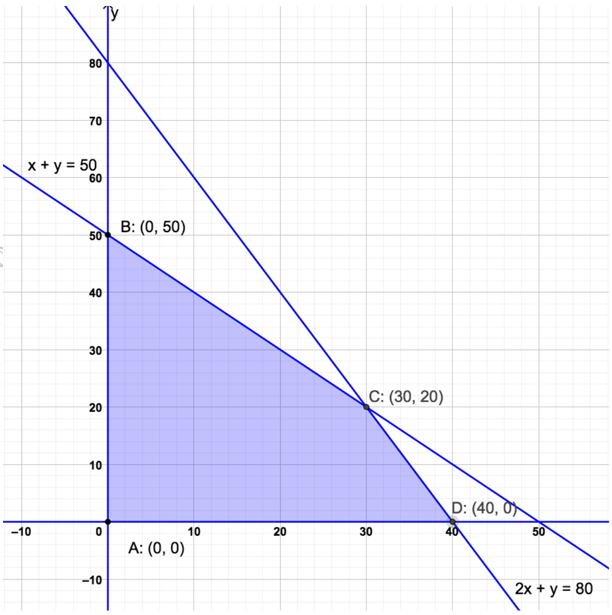
$$\begin{cases} x + y \leq 50 & \to (0,50) \quad \& \quad (50,0) \\ 2x + y \leq 80 & \to (0,80) \quad \& \quad (40,0) \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

- `Región factible` Representamos la región factible y calculamos los vértices de la misma

- `Optimización de la fución objetivo` Evaluamos la función objetivo en cada vértice

| Punto | x | y | f(x,y) |
|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 0 |
| B | 0 | 50 | 200 |
| C | 30 | 20 | 230 |
| D | 40 | 0 | 200 |






Luego el máximo de la función ese 230 que se produce en el punto $C(30,20)$

---

**Ejercicio 3 (2 *puntos*)**

*Dada la función real de variable real definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & si \quad x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2 - 2x}{x+2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) *Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.*

b) *Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.*

**Solución.**

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = 4$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-2x}{x+2} = 2$
- $f(2) = \dfrac{2+2}{2-1} = 4$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \implies f(x) \text{ no es continua en } x = 2$$

b) Cuando $x < 2,\ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \implies f'(x) = \dfrac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

---

**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

> *En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:*
>
> *a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.*
>
> *b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.*



**Solución.**

Sean los sucesos: $\begin{cases} T & \equiv \text{El cliente busca billete de transporte} \\ H & \equiv \text{El cliente busca un hotel} \end{cases}$

$$P(T) = 0.75 \quad \& \quad P(H) = 0.8 \quad \& \quad P(T\cap H) = 0.65$$

a) $P(T\cup H) = P(T) + P(H) - P(T\cap H) = 0.75 + 0.8 - 0.65 = 0.9$

b) $P(T \mid H) = \dfrac{P(T\cap H)}{P(H)} = \dfrac{0.65}{0.8} = 0.8125$

---

**Ejercicio 5 (2 *puntos*)**

> *La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria $X$ con distribución normal con media $\mu = 4$ gramos y desviación típica $\sigma = 0.5$ gramos.*
>
> *a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0.25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.*

*b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral , $\overline{X}$, pese más de 12.25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.*

**Solución.**

$$X : \mathcal{N}(4, 0.5) \quad \xrightarrow{n} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(4, {}^{0.5}/\sqrt{n})$$

a) Hallar el mínimo $n$ de tal forma que $\varepsilon \leq 0.25$, siendo $1 - \alpha = 0.95$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/2 = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/2 = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$\varepsilon < 0.25 \implies z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.25 \implies 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{n}} \leq 0.25 \implies n \geq \left(1.96 \cdot \frac{0.5}{0.25}\right)^2 = 15.36$$

$$\text{y por tanto } \boxed{n = 16}$$

b) $\quad X : \mathcal{N}(12, 0.5) \quad \xrightarrow{n=25} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(12, {}^{0.5}/\sqrt{25}) = \mathcal{N}(12, 0.1)$

$$P\left(\overline{X} > 12.25\right) = P\left(Z > \frac{12.25 - 12}{0.1}\right) = P(Z > 2.5) = 1 - P(Z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

# 2018 Junio
# Opción B

**Ejercicio 1 (2 *puntos*)**

*Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real $a$:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay+z & = & 1 \\ ax+y+(a-1)z & = & a \\ x+y+z & = & a+1 \end{array}\right\}$$

a) *Discútase en función de los valores del parámetro $a$.*

b) *Resuélvase para $a=3$.*

**Solución.**

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes $A$.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = \cancel{1} + \cancel{a} + a(a-1) - \left(\cancel{1} + a^2 + \cancel{a} - 1\right)$$

$$= -a+1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- $\boxed{\text{Si } a \neq 1}$ $\quad |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 3 = \text{ran}A^* = \text{n}^{\text{o}}\text{ incóg.} \Longrightarrow$ Sist. Comp. Det.

- $\boxed{\text{Si } a = 1}$ $\quad \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}A < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}A^* = 3$

  $$\text{ran}A = 2 \neq \text{ran}A^* = 3 \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Resolvemos el sistema para $a=3$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x + 3\cdot(-3/2) + 12 = 1 \\ -8\cdot(-3/2) - z = 0 \\ -2y = 3 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = -13/2 \\ y = -3/2 \\ z = 12 \end{array}}$$

**Ejercicio 2 (2 *puntos*)**

> *Se considera la función real de variable real* $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.
>
> *a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de* $f(x)$.
>
> *b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

**Solución.**

a)
- $x+1=0 \implies x=-1 \implies \text{dom(f)} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- `A.Horizontal` $\quad y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \Rightarrow \nexists\ A.H.$

- `A.Oblícua` Haciendo la división $\dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \dfrac{x^3}{x^2+2x+1}$ obtenemos la recta $y = x-2$.
  También podemos hallar la ecuación de la asíntota oblicua $y = mx+n$ de otra manera, haciendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\cdot(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-(x^3+2x^2+x)}{(x+1)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2-x}{(x+1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -2$$

- `A. Vertical` $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=-1$

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \left[\frac{-1}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$



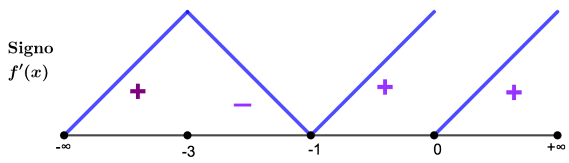
b) Para hallar los puntos singulares haremos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x+1)^2 - x^3\cdot 2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$$

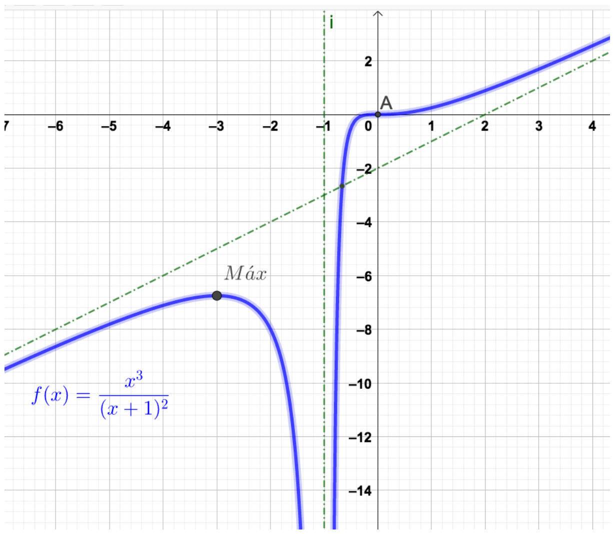
$$= \frac{x^4+4x^3+3x^2}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x^2\cdot\left(x^2+4x+3\right) = 0 \Rightarrow x = \{-1,\ -3,\ 0\}$$

Para evaluar el signo de $f'(x)$ suele ser útil factorizar la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{x^2\cdot\cancel{(x+1)}\cdot(x+3)}{(x+1)^{\cancel{4}3}} = \frac{x^2\cdot(x+3)}{(x+1)^3}$$




La función $f(x)$ es *creciente* en $(-\infty,-3) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$ y *decreciente* en $(-3,-1))$ y tiene un *máximo* en $x=-3$.




## Ejercicio 3 (2 *puntos*)

*Se considera la función real de variable real*

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x.$$

a) *Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje $OX$.*

b) *Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.*

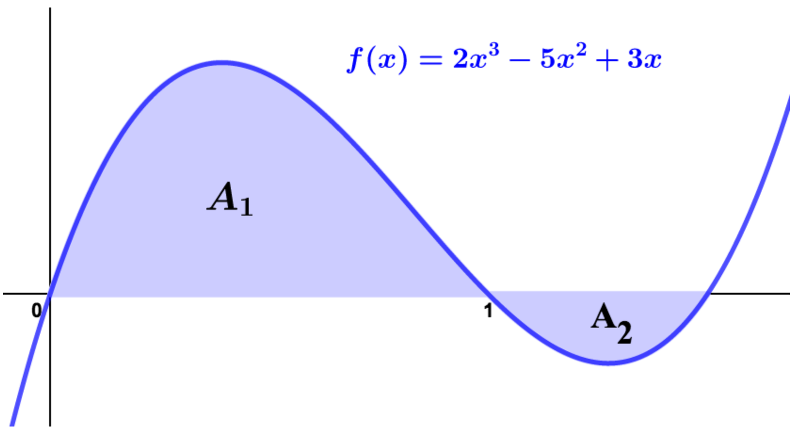


**Solución.**

a) Hallamos las raíces de $f(x)$, esto es, los puntos de corte con el eje OX.

$$2x^3-5x^2+3x = x\cdot(2x^2-5x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2-5x+3=0 \Rightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4} \Rightarrow x = \{1,\ {}^3\!/\!_2\} \end{cases}$$

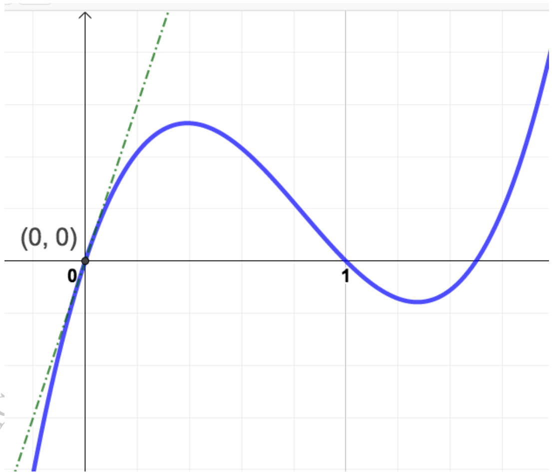
Sabiendo que los puntos de corte con el eje OX son $x=0$, $x=1$ y $x={}^3\!/\!_2$, planteamos el área de manera que $A_1$ estará comprendida en el intervalo $(0,1)$ y $A_2$ en $(1,3)$.



$$A_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2x^3 - 5x^2 + 3x)\,dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{3}{2}\right) - (0)$$
$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$
$$A_2 = \int_1^{3/2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 = \left(\frac{81}{32} - \frac{135}{24} + \frac{27}{8}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{9}{32} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{96}$$
$$A_{Total} = |A_1| + |A_2| = \frac{1}{3} + \frac{5}{96} = \frac{37}{96}\ u^2$$

b) El punto de tangencia es
$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = f(0) = 0$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 3$$
$$m_r = f'(x_0) = f'(0) = 3$$
$$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$$
$$r \equiv y - 0 = 3 \cdot (x - 0)$$
$$r \equiv y = 3x$$






**Ejercicio 4 (2 *puntos*)**

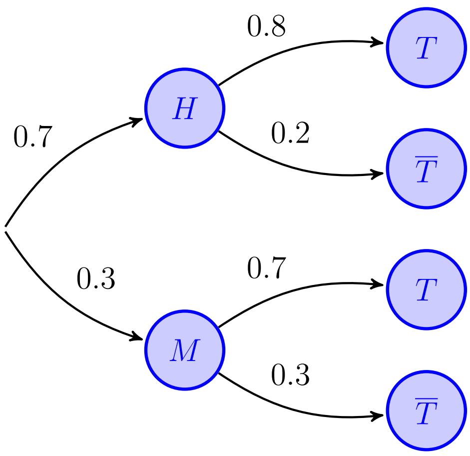
*En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad la probabildad de que un hombre trabaje es de 0.8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:*

*a) Una persona que trabaja.*

*b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.*

**Solución.**
Sean los sucesos:

$H \equiv$ "El primer nombre del buzon es masculino"
$M \equiv$ "El primer nombre del buzon es femenino"
$T \equiv$ "La persona trabaja"




a) $P(T) = P(H \cap T) + P(M \cap T)$

$$= P(H) \cdot P(T \mid H) + P(M) \cdot P(T \mid M)$$
$$= 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.77$$

b) $$P(H \mid T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{P(H) \cdot P(T \mid H)}{P(T)}$$
$$= \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.77} = 0.727$$

---

**Ejercicio 5 (2 *puntos*)**

*El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media $\mu$ descargas y desviación típica $\sigma = 10$ descargas.*

*a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99.5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para $\mu$.*

*b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra de 10 horas la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.*



**Solución.**

a) $$X : \mathcal{N}(\mu, 10) \quad \xrightarrow{n=40} \quad \overline{X} = 99.5$$

$$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}/_{2} = 0.975 \implies z_{\alpha/2} = 1.96$$
$$I.C. = \overline{X} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 99.5 \pm 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{40}} = (96.4, 102.6)$$

b) $$X : \mathcal{N}(100, 10) \quad \xrightarrow{n=10} \quad \overline{X} : \mathcal{N}(100, {}^{10}/_{\sqrt{10}}) = \mathcal{N}(100, 3.16)$$

$$P\Big(100 < \overline{X} < 110\Big) = P\left(\frac{100 - 100}{3.16} < Z < \frac{110 - 100}{3.16}\right) = P(0 < Z < 3.16)$$
$$= P(Z < 3.16) - P(z < 0) = 0.9992 - 0.5 = 0.4992$$

---