Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ *dependiente del parámetro real* a.

a) Determínese los valores de a *para los que la matriz* A *es invertible.*

b) Para $a = 1$*, despéjese y determínese la matriz* X *de la ecuación matricial* $A \cdot X = A + 2I$*, donde* I *representa la matriz identidad de orden 3.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2018 Modelo - Opción A)

Solución.

a) Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$| A |= 2a^3 \neq 0 \implies a \neq 0$$

b) Para $a = 1$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $| A |= 2 \cdot 1^3 = 2$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$AX = A + 2I$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I} X = A^{-1}(A + 2I)$$

$$X = A^{-1}(A + 2I) = \underbrace{A^{-1}A}_{I} + A^{-1}2I = I + 2A^{-1}I$$

$$X = I + 2A^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{| A |}\text{Adj } A^{\top} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = I + 2A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$