

Ejercicio 1 (2 puntos)

Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene inversa.
- Determinese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.
- Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1} ?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción A)

Solución.

- Para que una matriz sea invertible su determinante ha de ser distinto de cero.

$$|A| = 2 - 2k^2 = 0 \implies k = \pm 1$$

- Si $k \neq \{-1, 1\} \implies \exists A^{-1}$
- Si $k = \{-1, 1\} \implies \nexists A^{-1}$

- Para $k = 0$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante, sustituyendo en la expresión del apartado a), es $|A| = 2 - 2 \cdot 0^2 = 2$

Vamos a resolver la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \underbrace{A^{-1}A}_I X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Hallamos la matriz inversa de A por el método de los adjuntos.

$$\begin{aligned} \text{Adj } A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{Adj } A^\top = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota: Para hacer la comprobación tendríamos que ver si $A^{-1} \cdot A = I$

De esta forma tenemos que

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 6 = 12 \neq 0 \implies \exists M^{-1}$$

————— o —————

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM