

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese $A^{-1}A^T$. Nota.- La notación A^T representa la matriz transpuesta de A .

b) Resuélvase la ecuación matricial: $\frac{1}{4}A^2 - AX = B$

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2011 Septiembre - Opción B - Reserva)

Solución.

$$\text{a) } \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^T = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A^T = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \frac{1}{4}A^2 - AX = B \Rightarrow \frac{1}{4}A^2 - B = AX \Rightarrow A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \underbrace{A^{-1}A}_I X$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

_____ o _____