

Ejercicio 1 (2 puntos)

Considérese las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Determinése la matriz C^{40} .*

b) *Calcúlese la matriz X que verifica $X \cdot A + 3B = C$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2017 Septiembre - Opción B)

Solución.

a) ■ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

■ $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

■ $C^3 = C \cdot C^2 = C \cdot I = C$

■ $C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$

b)

$$X \cdot A + 3B = C$$

$$X \cdot A = C - 3B$$

$$X \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_I = (C - 3B) \cdot A^{-1}$$

$$X = (C - 3B) \cdot A^{-1}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, y se puede comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$.

$$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

De esta forma

$$X = (C - 3B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

_____ o _____