

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\left. \begin{array}{rcl} x - 2y - z & = & -2 \\ -2x - az & = & 2 \\ y + az & = & -2 \end{array} \right\}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a .

b) Resuélvase para $a = 4$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Septiembre 2017 - Opción A)

Solución.

MÉTODO DE ROUCHÉ

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 2 - 3a = 0 \Rightarrow a = 2/3$$

■ Si $a \neq 2/3$ $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).}$

■ Si $a = 2/3 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \Rightarrow \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución)}$

b) Resolvemos el sistema para $a = 4$ por el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \sim F_2 + 2F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \sim F_3 \leftrightarrow F_2 \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{array} \right) \sim F_3 + 4F_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \begin{array}{l} x - 2 \cdot 2 - (-1) = -2 \\ y + 4 \cdot (-1) = -2 \\ 10z = 10 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{array}} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

MÉTODO DE ROUCHÉ

- a) Escribimos el sistema en forma matricial procurando que los parámetros estén situados los más abajo a la derecha posible. Posteriormente hacemos el método de Gauss.

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array} \right) \sim F_2 + 2F_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 1 & a & -2 \end{array} \right) \\ &\sim \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -2-a & -2 \\ 0 & 0 & -2+3a & -10 \end{array} \right) \Rightarrow -2+3a=0 \Rightarrow a=2/3 \\ &\quad 4F_3 + F_2 \end{aligned}$$

- Si $a \neq 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & -10 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SIST. COMPATIBLE DETERMINADO}$
- Si $a = 2/3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -10 \end{array} \right) \Rightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBLE}$

- b) Sustituimos $a = 4$ en el sistema escalonado obtenido en el apartado anterior

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -10 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{aligned} x - 2 \cdot 2 - (-1) &= -2 \\ -4y - 6 \cdot (-1) &= -2 \\ 10z &= -10 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}}$$

————— ○ —————