Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-ay+2z & = & 0 \\ ax-4y-4z & = & 0 \\ (2-a)x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) *Discútase en función de los valores del parámetro a.*

b) *Resuélvase para $a=3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -6a^2+6a+36 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-2,3\}$ $\;|A| \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (Solución única $x=0,\ y=0,\ z=0$).

- Si $a=-2 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

- Si $a=3 \Longrightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow \text{ran}(A) = 2$

  $\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{nº incóg.} \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Resolvemos el sistema para $a=3$ por el método de Gauss. Teniendo en cuenta que se trata de un S.C.I. resolvemos solo las filas correspondientes al menor de orden 2 distinto de cero encontrado en la discusión:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2-3F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} x-6\lambda+2\lambda=0 \\ 5y-10t=0 \\ z=\lambda \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=4\lambda \\ y=2\lambda \quad ,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}}$$

a) Escribimos el sistema en forma matricial y hacemos el método de Gauss después de colocar los parámetros lo más a la derecha y lo más abajo posible.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 2 & 0 \\ a & -4 & -4 & 0 \\ 2-a & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \ C_1 \leftrightarrow C_3 \ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 0 \\ -4 & -4 & a & 0 \\ -2 & 3 & 2-a & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -4-2a & 2+a & 0 \\ 0 & 3-a & 3-a & 0 \end{array}\right) \sim \quad (4+2a)F_3 + (3-a)F_2 \quad \sim$$

$$4 + 2a = 0 \implies a = -2 \text{ luego seguimos si } a \neq -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -4-2a & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & (3-a)\cdot(4+2a) & 0 \end{array}\right) \implies (3-a)\cdot(4+2a) = 0 \implies$$

$$\begin{cases} 4 + 2a = 0 \implies \cancel{a = -2} \text{ pues } a \neq -2 \\ 3 - a = 0 \implies a = 3 \end{cases}$$

- Si $a \neq \{-2, 3\} \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \square & 0 \end{array}\right) \implies$ Sist. Compatible Determinado
- Si $a = -2$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies$ Sist. Comp. Indeterminado
- Si $a = 3$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies$ Sist. Comp. Indeterminado

b) Sustituimos el valor $a = 3$ en el sistema escalonado conseguido en el apartado anterior. Hay que tener en cuenta que hemos intercambiado las columnas C_1 y C_3, con lo que las variables x y z están intercambiadas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \Rightarrow 2z - 3y + t = 0 & \Rightarrow & z = t/4 \\ \Rightarrow -10y + 5t = 0 & \Rightarrow & y = t/2 \\ \Rightarrow x = t & \Rightarrow & x = t \end{array} \Rightarrow t = 4\lambda \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{array}}$$