

Ejercicio 1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{aligned} -x + 3y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + z &= 1 \\ -x + ay + 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Junio 2017 - Opción B - Coincidentes)

Solución.

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array} \right)$$

1) Método de Gauss

$$\begin{aligned} A/A^* &= \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array} \right) \sim C_2 \leftrightarrow C_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 2F_3 - F_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-6 & -1 \end{array} \right) \\ &\implies 2a-6=0 \implies a=3 \end{aligned}$$

- Si $a \neq 3 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).
- Si $a = 3 \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \implies$ SISTEMA INCOMPATIBLE (No tiene solución).

2) Método Rouché-Frobenius

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A .

$$|A| = 6 - 2a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3 = \text{ran}(A^*) = n^\circ \text{ incóg.} \implies$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (Solución única).

- Si $a = 3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right)$

$$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3 \text{ y como } \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 3$$

$\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \implies \text{SISTEMA INOMPATIBLE (No tiene solución)}$

b) Resolvemos el sistema para $a = 1$ por el método de Gauss.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \begin{array}{l} -x + 3(1/4) + 3(-1/2) = 0 \\ -2z = 1 \\ -2y - (-1/2) = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{array}} \end{aligned}$$

————— ○ —————

HTTPS://APRENDECONMIGOMELON.COM