Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & si \quad x \leq 1/2 \\ bx + c & si \quad x > 1/2 \end{cases}$$

Calcúlense los valores de a, b, c para que f satisfaga todas las condiciones siguientes:

- $a > 0$
- *La función f es continua y derivable en $x = 1/2$.*
- *El valor del área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = -2$, $x = 0$, es igual a $32/3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - 2011 Septiembre - Opción B - Reserva)

Solución.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1/2$

- $\lim\limits_{x\to 1/2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1/2} \left(ax^2\right) = \dfrac{a}{4}$
- $\lim\limits_{x\to 1/2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1/2} (bx + c) = \dfrac{b}{2} + c$
- $f(1/2) = a \cdot (1/2)^2 = \frac{a}{4}$

$f(x)$ es continua en $x = 1/2$ si,

$$\lim_{x\to 1/2^-} f(x) = \lim_{x\to 1/2^+} f(x) = f(1/2) \implies \frac{a}{4} = \frac{b}{2} + c \implies \boxed{a = 2b + 4c}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si} \quad x \leq 1/2 \\ b & \text{si} \quad x > 1/2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1/2$

- $\lim\limits_{x\to 1/2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1/2} (2ax) = a$
- $\lim\limits_{x\to 1/2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1/2} (b) = b$

$f(x)$ es derivable en $x = 1/2$ si,

$$\lim_{x\to 1/2^-} f'(x) = \lim_{x\to 1/2^+} f'(x) \implies \boxed{a = b}$$

Reuniendo todas las condiciones que tenemos hasta el momento:

$$\begin{cases} a > 0 \\ a = 2b + 4c \\ a = b \end{cases} \implies \begin{cases} a > 0 \\ a = b = -4c \end{cases}$$

La última ecuación la sacaremos de la condición del área. Para ello procederemos de la forma habitual, calculando el área, que saldrá en función de alguno de los parámetros $a,\ b,\ c$, e igualandolo a $32/3$.
Hallamos los puntos de corte con el eje x, haciendo $y = 0$.

$$ax^2 = 0 \implies x = 0 < \frac{1}{2} \implies \text{OK}$$
$$bx + c = 0 \implies x = -\frac{c}{b} = -\frac{c}{-4c} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \implies \nexists \text{ Pto. corte}$$

Representamos los puntos de corte, las rectas $x = 0$ y $x = -2$ y la frontera de la función $f(x)$, $x = 1/2$, notando que hay un único área A_1 que calcular. De esta forma:

$$A_1 = \int_{-2}^{0} ax^2\,dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(-\frac{8a}{3}\right) = \frac{8a}{3} = \frac{32}{3} \xRightarrow{a>0} a = 4$$

Con lo que queda:

$$\boxed{a = b = 4 \quad \& \quad c = -1}$$