Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4} \qquad \& \qquad P(A \mid B) = \frac{3}{4} \qquad \& \qquad P(B \mid A) = \frac{1}{4}$$

a) Demuéstrese que los sucesos A y B son independientes pero no incompatibles.

b) Calcúlese $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

Solución.

a) Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Intentaré exprimir la información que me dan en el enunciado. Así:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \implies P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \mid B)} = \frac{3/16}{3/4} = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cap B) = \frac{3}{16} = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \implies A \text{ y } B \text{ son independientes}$$
$$P(A \cap B) \neq 0 \implies A \text{ y } B \text{ no son incompatibles}$$

b)

$$P(\overline{A} \mid \overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\overline{A \cup B}}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$$
$$= \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(B)} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$