RgM-1 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro m.

b) En el caso $m=0$, resolver el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(PAU Madrid II Septiembre 2010 FG)

Solución:

a) Estudiar el rango de A

$$A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \xrightarrow[C_3=C_3-C_1]{C_2=C_2-C_1} = \begin{vmatrix} m-1 & -m+2 & 2 \\ 1 & m-2 & m-2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (m-2)\cdot\begin{vmatrix} -m+2 & 2 \\ m-2 & m-2 \end{vmatrix} =$$

$$=(m-2)^2\cdot\begin{vmatrix} -m+2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-2)^2\cdot(-m+2-2) = -m\cdot(m-2)^2 = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} \boxed{m=2} \\ \boxed{m=0} \end{array} \right.$$

• Si $m=2$ $\rightarrow$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\text{rg}\, A=1$

sirzunzu@gmail.com

• Si $m=0 \quad \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{rg } A \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ pero como } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{rg } A = 3$$

• Si $m \neq 2 \ \wedge \ m \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} m-1 & 1 & m \\ 1 & m-1 & m \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 & 1 & m-1 \\ 1 & & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{rg } A = 3$$

b) En el caso de $m=0$ resolver el sistema: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3+F_1]{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[z=\lambda]{t=0} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2\lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2y=-2\lambda]{-x-\lambda=0} \boxed{\begin{array}{c} x=-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \\ t=0 \end{array}}$$

RgM-2 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix}$

a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro *a*.
b) ¿Para qué valores de *a* existe la matriz inversa A^{-1}? Calcular A^{-1} para $a=1$
(PAU Madrid II Septiembre 2010 FG)

Solución:

a) Estudiar el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{pmatrix} \qquad |A|=\begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} = \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \begin{vmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & a-1 & a \\ 0 & a & a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= -a\cdot\begin{vmatrix} a-1 & a \\ a & a+2 \end{vmatrix} = -a\cdot\left[(a-1)\cdot(a+2)-a^2\right] =$$

$$-a\cdot\left(\cancel{a^2}+a-2-\cancel{a^2}\right) = -a\cdot(a-2)=0 \left\langle \begin{matrix} \boxed{a=0} \\ \boxed{a=2} \end{matrix} \right.$$

Si $a=0 \quad \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$|A|=0 \quad \rightarrow \quad \text{rg } A<3$ y como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rg } A=2}$

Si $a=2 \quad \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$|A|=0 \quad \rightarrow \quad \text{rg } A<3$ y como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{rg } A=2}$

Si $a \neq 0 \wedge a \neq 2 \quad \rightarrow \quad |A| \neq 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\operatorname{rg} A = 3}$

b) Calcular A^{-1} cuando $a = 1$

No existe A^{-1} cuando el determinante es nulo, es decir cuando $a = 0 \vee a = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Determinante}} |A| = -a \cdot (a-2) = 1 \xrightarrow[\text{Complementarios}]{\text{Menores}} \alpha_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Adj}(A)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(A)^t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

RgM-3 Sea B una matriz 3x3 cualquiera. Indica, justificando las respuestas, si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $ran(B)=2 \quad \rightarrow \quad ran(B^2)=2$

b) Si $ran(B)=3 \quad \rightarrow \quad ran(B^3)=3$

c) Si $ran(B)=3 \quad \rightarrow \quad ran(B^{-1})=3$

Solución:

Ver página 92

RgM-4 Halla el rango de las siguientes matrices

A) $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

RgM-5 Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro "*a*"

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución:

RgM-6 ¿Para qué valor de *a* se anula este determinante?
(PAU)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Calcula el rango de la matriz A en los casos: $a = 1$, $a = 0$ y $a = 2$.

Solución:

RgM-7 Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:
(PAU)

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$

Solución:

RgM-8 Determina el rango de las siguientes matrices según los valores de t:
(PAU)

a) $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} t & 2 & 2 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} t+3 & 4 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ -4 & -4 & t-1 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -t & 6 & 3-t \end{pmatrix}$

e) $E=\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$

f) $F=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -2-t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$

Solución:

RgM-9 Estudia el rango de las matrices M y N según los valores de “”

$$M=\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & a & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

RgM-10 Hallar el rango de la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \hdashline 4 & 5 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Debido a que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 2$.

Ampliamos con la fila 3 y la columna 3 y volvemos a calcular el determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que ampliaremos el menor de orden dos con la fila 3 y la columna 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo que ampliaremos el menor de orden dos con la fila 4 y la columna 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 3$$

, las filas 1, 2 y 4 son L.I. No podrá tener rango 4 porque tal y como hemos visto las tres primeras filas son L.D. así que al añadir la cuarta fila seguirán siendo l.D.

Zzzzz seguir con la matriz B

RgM-11 Hallar el rango de la siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

RgM-12 Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

RgM-13 Las matrices A y B tienen 3 filas y 12 columnas pero, en el proceso de edición, algunas de éstas se han borrado.

(PAU)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & ... & ... & ... \\ 3 & -1 & 0 & ... & ... & ... \\ -7 & 5 & -2 & ... & ... & ... \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & ... & ... & ... \\ 3 & 0 & 1 & ... & ... & ... \\ 5 & 4 & 0 & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

¿Puedes averiguar algo sobre los posibles valores de su rango?

Si llamamos C a la matriz cuyas columnas son las 24 que forman las dos matrices A y B ¿cuál será el rango de C?

Solución:

RgM-14 Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$, donde a, b y c son no nulos.

a) Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.
b) Calcula el rango de A.
(PAU)

Solución:

RgM-15 Estudia el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de *a*, *b* y *c*: *(PAU)*

$$M=\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{pmatrix}$$

Solución:

- $ran(M)\geq 1$ en cualquiera de los casos ya que $5\neq 0$

Cogemos un menor de orden 2. $\begin{vmatrix}5 & 5\\ a & b\end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; 5a-5b=0 \;\rightarrow\; a=b$

- Si $a\neq b \;\rightarrow\; ran(M)\geq 2$

$$|M|=\begin{vmatrix}5 & 5 & 5\\ a & b & c\\ b+c & a+c & a+b\end{vmatrix}=\xrightarrow[F_3=F_3+F_2]{}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a+b+c & a+b+c & a+b+c\end{vmatrix}=$$

$$5\cdot(a+b+c)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

- Como $|M|=0 \;\rightarrow\; ran(M)<3$. Por tanto:

- $$\boxed{\begin{cases}\text{Si } a=b & \rightarrow\; ran(M)=1\\ \text{Si } a\neq b & \rightarrow\; ran(M)=2\end{cases}}$$

RgM-16 Estudia el rango de la matriz:

$$4\; A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

RgM-17 Zzz seguir aquí.

Solución:

RgM-18

Solución:

RgM-19

Solución:

RgM-20

Solución:

RgM-21

Solución:

RgM-22

Solución:

RgM-23

Solución:

RgM-24

Solución:

RgM-25

Solución: