

Ejercicio 0 (2 puntos)

Tenemos dos urnas A y B y una moneda trucada de manera que la probabilidad de sacar cara es tres veces la de sacar cruz. La urna A contiene 4 bolas rojas y 5 blancas. La urna B contiene 6 bolas rojas y 4 blancas. Se lanza la moneda al aire. Si sale cara se pasa una bola de la urna A a la urna B , si sale cruz se pasa una bola de la urna B a la urna A . Se extrae una bola al azar de la urna B . Calcúlese la probabilidad de que:

- La bola extraída sea blanca.
- Sabiendo que la bola extraída es roja calcúlese la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cruz.

Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned}C &\equiv \text{Ha salido cara en la moneda"} \\X &\equiv \text{"Ha salido cruz en la moneda"} \\b &\equiv \text{"Se pasa una bola blanca"} \\r &\equiv \text{"Se pasa bola roja"} \\B &\equiv \text{"Se extrae bola blanca de la urna B"} \\R &\equiv \text{"Se extrae bola roja de la urna B"}\end{aligned}$$

Si nos dicen que la probabilidad de sacar cara es el triple de la de sacar cruz, llamaremos $P(X) = p$, por lo que $P(C) = 3p$, y como

$$P(C) + P(X) = 1 \implies p + 3p = 1 \implies 4p = 1 \implies p = \frac{1}{4}$$

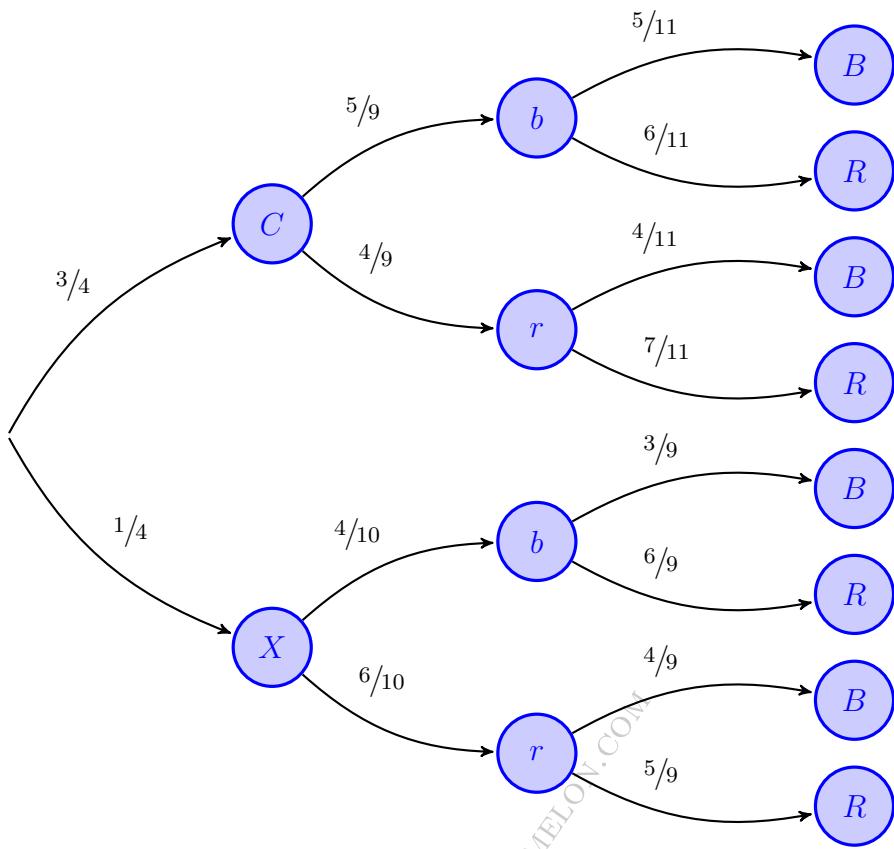
Si sale cara en la moneda pasamos una bola de la urna A a la urna B . La configuración de la urna B será:

$$C \Rightarrow \begin{cases} P(b | C) = 5/9 \rightarrow 5B & \& P(R | C \cap b) = 5/11 & \& P(R | C \cap b) = 6/11 \\ P(r | C) = 4/9 \rightarrow 4B & \& 7R \rightarrow P(B | C \cap r) = 4/11 & \& P(R | C \cap r) = 7/11 \end{cases}$$

Mientras que si sale cruz pasamos una bola de la urna B a la urna A . La configuración de la urna B será:

$$X \Rightarrow \begin{cases} P(b | C) = 4/10 \rightarrow 3B & \& 6R \rightarrow P(B | C \cap b) = 3/9 & \& P(R | C \cap b) = 6/9 \\ P(r | C) = 6/10 \rightarrow 4B & \& 5R \rightarrow P(B | C \cap r) = 4/9 & \& P(R | C \cap r) = 5/9 \end{cases}$$

Conviene darse cuenta de que si sale cara la urna B , termina con una bola más que las iniciales 10 que tenía, mientras que si sale cruz, terminará con una bola menos.



a)
$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(C \cap b \cap B) + P(C \cap r \cap B) + P(X \cap b \cap B) + P(X \cap r \cap B) \\
 &= P(C \cap b) \cdot P(B | C \cap b) + P(C \cap r) \cdot P(B | C \cap r) \\
 &\quad + P(X \cap b) \cdot P(B | X \cap b) + P(X \cap r) \cdot P(B | X \cap r) \\
 &= P(C) \cdot P(b | C) \cdot P(B | C \cap b) + P(C) \cdot P(r | C) \cdot P(B | C \cap r) \\
 &\quad + P(X) \cdot P(b | X) \cdot P(B | X \cap b) + P(X) \cdot P(r | X) \cdot P(B | X \cap r) \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{11} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0.411
 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
 P(X | R) &= \frac{P(X \cap R)}{P(R)} = \frac{P(X \cap b \cap R) + P(X \cap r \cap R)}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{P(X) \cdot P(b | X) \cdot P(B | X \cap b) + P(X) \cdot P(r | X) \cdot P(B | X \cap r)}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}}{1 - 0.411} = 0.17
 \end{aligned}$$

————— o —————