

MI-1 Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcúlese los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.
 b) Para $k=0$ calcúlese la matriz inversa A^{-1}
 c) Para $k=0$ resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.
 (PAU Madrid CCSS Junio 2011FG – Opción B)

Solución:

- a)** Calcúlese los valores de k para los cuales la matriz A no es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 \rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=3 \end{cases}$$

- b)** Para $k=0$ calcúlese la matriz inversa A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- c)** Para $k=0$ resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

$$A \cdot X = B \rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = B$$

MI-2 Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- a) Calcular los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.
 b) Para $a = 2$ calcular la inversa de la matriz A .
 c) Para $a = 2$ calcular la matriz X que satisface $A \cdot X = B$
 (PAU Madrid CCSS Modelo 2011 – Opción B)

Solución:

- a)** Calcular los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

Para que una matriz tenga inversa debe ser cuadrada y su determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + F_1} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ a & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -5 \end{vmatrix} = 5 - a^2 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{5}$$

Por tanto

$$a \neq \pm\sqrt{5}$$

- b)** Para $a = 2$ calcular la inversa de la matriz A .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 5 - a^2 = 5 - 2^2 = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ -5 & -2 & 12 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}^t \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

- c)** Para $a = 2$ calcular la matriz X que satisface $A \cdot X = B$

$$A \cdot X = B \rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

MI-3 Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2 \cdot (a+1) & a+1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcúlese los valores de a para los cuales no existe la matriz inversa.
 b) Para $a = -1$, calcúlese la matriz inversa A^{-1} .
 c) Para $a = 0$, calcúlese todas las soluciones del sistema lineal $A \cdot X = 0$.
 (PAU Madrid CCSS Septiembre 2010 FE – Opción B)

Solución:

a) La matriz inversa no existe cuando su determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2 \cdot (a+1) & a+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 = C_1 - C_3} \begin{vmatrix} a-1 & 2 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ a-1 & 2 \cdot (a+1) & a+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} =$$

$$= \begin{vmatrix} a-1 & 2 & -1 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 2a & a+2 \end{vmatrix} = (a-1) \cdot (a^2 + 2a - 4a) = a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \neq 0 \rightarrow \begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{matrix}$$

b) Para $a = -1$ calcular la inversa

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Determinante}} |A| = -6 \xrightarrow{\text{Menores complementarios}} \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Matriz de adjuntos}} \xrightarrow{\text{Matriz de adjuntos}} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Traspuesta de la adjunta}} \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} \rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Para $a = 0$ resolver el sistema $A \cdot X = 0$

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{z=\lambda} \\
 &\xrightarrow{z=\lambda} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & \lambda \\ 0 & 2 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -2+2 \cdot (-\lambda/2) = \lambda \\ 2y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}} \boxed{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -\lambda/2 \\ z = \lambda \end{array}}
 \end{aligned}$$

MI-4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ estudiarla para qué valores de a tiene inversa y calcularla siempre que sea posible.
(PAU Madrid II Junio 2010 FE)

Solución:

a) Para qué valores de a existe A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a = 0 \rightarrow \exists \text{ inversa siempre que } a \neq 0$$

b) Calcular A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Determinante}} |A| = a \xrightarrow{\text{Matriz de menores complementarios}} \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ a^2 - 1 & a & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(A)} \\ \xrightarrow{\text{Adj}(A)} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 - a^2 & a & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Adj}(A)^t} \begin{pmatrix} a & 1 - a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 - a^2 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$