

EMat-1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Hallar dos constantes a y b tales que $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$
 b) Sin calcular explícitamente A^3 y A^4 , y utilizando sólo la expresión anterior, obtener la matriz A^6 .
 (PAU Madrid II Junio 2010 FG)

Solución:

a) Calcular a y b que cumpla: $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = a \cdot A + b \cdot I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & -2a+b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=-1 \end{cases}$$

b) Hallar A^6 sabiendo que $A^2 = -A + 3 \cdot I$

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-A + 3 \cdot I) \cdot A = -A^2 + 3A = -(-A + 3 \cdot I) + 3A = A - 3 \cdot I + 3A = 4A - 3I$$

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (4A - 3I) \cdot (4A - 3I) = 16A^2 - 12A - 12A + 9I = 16A^2 - 24A + 9I =$$

$$= 16 \cdot (-A + 3 \cdot I) - 24A + 9I = -16A + 48I - 24A + 9I = -40A + 57I =$$

$$= -40 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 57 & 0 \\ 0 & 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & -40 \\ -40 & 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 57 & 0 \\ 0 & 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -40 \\ -40 & 137 \end{pmatrix}$$

Es importante ver cómo hemos resuelto la igualdad notable $(4A - 3I)^2$ porque en general no es igual a $16A^2 + 9I^2 - 24A$, ya que el producto de matrices no es conmutativo. En este caso particular sí podríamos haber desarrollado de esta manera la igualdad notable pero es porque una de las matrices es la matriz unidad que sí que conmuta.

EMat-2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot P = P \cdot A$
 (PAU Madrid II Junio 2006 - Opción A)

Solución:

Dada la imposibilidad de despejar P, plantearemos la ecuación matricial “de cara”.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+2c = a & \rightarrow c=0 \\ b+2d = 2a+b & \rightarrow a=d \\ c=c \\ d = 2c+d & \rightarrow c=0 \end{cases} \rightarrow P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

EMat-3 Hallar todas las matrices X cuadradas 2×2 que satisfacen la igualdad

$$X \cdot A = A \cdot X$$

En cada uno de los dos casos siguientes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(PAU Madrid CCSS Junio 2006 Opción B)

Solución:

a) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$X \cdot A = A \cdot X \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & 3y \\ z & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 3z & 3t \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = x \rightarrow \boxed{x = \lambda} \\ 3y = y \rightarrow 2y = 0 \rightarrow \boxed{y = 0} \\ z = 3z \rightarrow 2z = 0 \rightarrow \boxed{z = 0} \\ 3t = 3t \rightarrow \boxed{t = \mu} \end{cases} \rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}}$$

b) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$X \cdot A = A \cdot X \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3y & x \\ 3t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ 3x & 3y \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3y = z \xrightarrow{\boxed{y=\lambda}} \boxed{z=3\lambda} \\ x = t \xrightarrow{\boxed{x=\mu}} \boxed{t=\mu} \\ 3t = 3x \\ z = 3y \end{cases} \rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ 3\lambda & \mu \end{pmatrix}}$$

EMat-4 Hallar todas las matrices:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

que satisfacen la ecuación matricial $X^2 = 2X$
(PAU Madrid CCSS Junio 2004 Opción B)

Solución:

$$\begin{aligned} X^2 = 2X &\rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab+bc & bc+c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} a^2 = 2a & \rightarrow a \cdot (a-2) = 0 & \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases} \\ ab+bc = 2b & \rightarrow b \cdot (a+c-2) = 0 & \begin{cases} b=0 \\ a+c=2 \end{cases} \\ c^2 = 2c & \rightarrow c \cdot (c-2) = 0 & \begin{cases} c=0 \\ c=2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Que arroja las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} \bullet a=0 &\begin{cases} b=0 & \begin{cases} c=0 \\ c=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a,b,c)=(0,0,0) \\ (a,b,c)=(0,0,2) \end{cases} \\ a+c=2 \rightarrow c=2 \rightarrow b=\lambda &\rightarrow (a,b,c)=(0,\lambda,2) \text{ incluye } (0,0,2) \end{cases} \\ \bullet a=2 &\begin{cases} b=0 & \begin{cases} c=0 \\ c=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a,b,c)=(2,0,0) \\ (a,b,c)=(2,0,2) \end{cases} \\ a+c=2 \rightarrow c=0 \rightarrow b=\lambda &\rightarrow (a,b,c)=(2,\lambda,0) \text{ incluye } (2,0,2) \text{ y } (2,0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

Las soluciones de X serán:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 2 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

EMat-5 Calcular los valores de a para los cuales la inversa de la matriz

$$A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \text{ coincide con su traspuesta.}$$

(PAU Madrid CCSS Septiembre 2003 Opción A)

Solución:

$$|A| = \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \cdot (a^2 + 16) = 0 \rightarrow a^2 + 16 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{-16} \rightarrow \exists A^{-1} \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^t \rightarrow A \cdot A^{-1} = A \cdot A^t \rightarrow I = A \cdot A^t \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} a^2 + 16 & 0 \\ 0 & 16 + a^2 \end{pmatrix} \rightarrow 1 = \frac{1}{25} \cdot (a^2 + 16) \rightarrow a = \pm\sqrt{9} \rightarrow \boxed{a = \pm 3} \end{aligned}$$

EMat-6 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcular las matrices $M = A \cdot B$ y $N = B \cdot A$
 b) Calcular P^{-1} , siendo $P = (N - I)$, donde I representa la matriz identidad.
 c) Resolver el sistema $P \cdot X = C$
 (PAU Madrid CCSS Junio 2002 Opción A)

Solución:

- a)** Calcular las matrices $M = A \cdot B$ y $N = B \cdot A$

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$$

$$N = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- b)** Calcular P^{-1} , siendo $P = (N - I)$, donde I representa la matriz identidad.

$$P = N - I = N - I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |P| = 2$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot (\text{Adj } P)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

c) Resolver el sistema $P \cdot X = C$

$$\begin{aligned} P \cdot X = C &\rightarrow \underbrace{P^{-1} \cdot P}_I \cdot X = P^{-1} \cdot C \rightarrow X = P^{-1} \cdot C = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

EMat-7 Encontrar todas las matrices X tales que $A \cdot X = X \cdot A$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
 (PAU Madrid CCSS Septiembre 2002 Opción A)

Solución:

Sea la matriz: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot X = X \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = a + 4b & \rightarrow b = 0 & a = \lambda \\ b = 2b & \rightarrow b = 0 & b = 0 \\ 4a + 2c = c + 4d & \rightarrow c = 4d - 4a & c = 4\mu - 4\lambda \\ 4b + 2d = 2d & \rightarrow b = 0 & d = \mu \end{cases} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 4\mu - 4\lambda & \mu \end{pmatrix}$$