CDet-1 Halla los valores de a que anulan cada uno de los siguientes determinantes: *(PAU)*

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-2 Calcula el valor de los siguientes determinantes:
(PAU)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-3 ¿Para qué valores de x se anulan los determinantes siguientes?
(PAU)

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-4 Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:
(PAU)

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = \xrightarrow{C_1=C_1+C_2+C_3+C_4} = \begin{vmatrix} 3x+3 & x & x & x \\ 3x+3 & 3 & x & x \\ 3x+3 & x & 3 & x \\ 3x+3 & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3x+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3=F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4=F_4-F_1} \end{matrix} C_1 = C_1 + C_2 +$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3=F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4=F_4-F_1} \end{matrix} = 3\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (-1)^3\cdot 3\cdot(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & x-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$\boxed{= -3\cdot(x+1)\cdot(x-3)^3}$$

CDet-5 Resuelve la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2=F_2+F_1} \\ \xrightarrow{F_3=F_3-F_1} \\ \xrightarrow{F_4=F_4+F_1} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x+1 & 0 & 4 & 3 \\ x^2-1 & 0 & 8 & 3 \\ x^3+1 & 0 & 28 & 9 \end{vmatrix} =$$

Desarrollamos por la segunda columna y sacamos del determinante el término $(x+1)$ que multiplica a toda la primera columna. Es obvio en el término a_{11}, menos obvio aunque fácil de ver en el término a_{21} y, aunque no es tan fácil de ver el término a_{31}, estamos obligados a comprobar mediante Ruffini si (x^3+1) es también múltiplo de $(x+1)$.

$$= -\begin{vmatrix} x+1 & 4 & 3 \\ x^2-1 & 8 & 3 \\ x^3+1 & 28 & 9 \end{vmatrix} = -(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ x-1 & 8 & 3 \\ x^2-x+1 & 28 & 9 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2=F_2-F_1} \\ \xrightarrow{F_3=F_3-3F_1} \end{array} =$$

$$= -(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ x-2 & 4 & 0 \\ x^2-x-2 & 16 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x-2 & 1 & 0 \\ (x-2)\cdot(x+1) & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x+1 & 4 \end{vmatrix} = -12\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot[4-(x+1)] =$$

$$= -12\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(-x+3) = 12\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} \boxed{x=-1} \\ \boxed{x=2} \\ \boxed{x=3} \end{array} \right.$$

CDet-6 Determina las matrices cuadradas de orden dos cuyos elementos sean números enteros, con determinante igual a -1, y tal que su inversa coincidacon su traspuesta.

Solución:

Suponemos la matriz de orden dos: $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Tenemos dos condiciones que cumplir:

❶ $|A| = -1 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y \\ z & \end{vmatrix} = xt - yz = -1$ ①

❷ $\begin{matrix} A^{-1} = A^t \\ A \cdot A^{-1} = I \end{matrix} \quad \rightarrow \quad A \cdot A^t = I \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & ② \\ xz + yt = 0 & \\ zx + ty = 0 & ③ \\ z^2 + t^2 = 1 & ④ \end{cases}$ Esta ecuación es igual que la siguiente.

Por tanto tenemos un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que no podemos resolver mediante Gauss ya que las incógnitas están elevadas al cuadrado y multiplicadas entre sí.

De la segunda ecuación sacaremos:

② $\rightarrow \quad x^2 = 1 - y^2$ que para que tenga solución exige: $1 - y^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y \in [-1, 1]$, y para que ésta sea un número entero $y = \{-1, 0, 1\}$.

$$y_1 = -1 \xrightarrow{(2)} x_1 = 0 \xrightarrow{(1)} z_1 = -1 \xrightarrow{(3)} t_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así: $\int y_2 = 0 \xrightarrow{(2)} \begin{cases} x_2 = 1 \xrightarrow{(1)} t_2 = -1 \xrightarrow{(3)} z_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ x_3 = -1 \xrightarrow{(1)} t_3 = 1 \xrightarrow{(3)} z_3 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ q.e.d.

$$y_4 = 1 \xrightarrow{(2)} x_4 = 0 \xrightarrow{(1)} z_4 = 1 \xrightarrow{(3)} t_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CDet-7 Halla en función de *a* el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

El truco de este tipo de determinantes radica en sumar a una linea todas las demás de forma que luego pueda sacar un valor fuera del determinante:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[F_4=F_4-F_1]{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$=(a-3)\cdot\begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = \boxed{(a-3)\cdot(a-1)}$$

CDet-8 Calcula el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 17 \\ 4 & 13 & -2 \\ 1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

a) Desarrollándolo por la 3ª columna.
b) Desarrollándolo por la 2ª fila.

Solución:

CDet-9 Calcula el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-10 Calcular el determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-11 Calcular los siguientes determinantes haciendo ceros en alguna línea:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \\ -1 & 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-12 Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 27 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-13 Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-14 Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-15 Resuelve los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

Solución:

CDet-16 Halla, en función de *a*, el valor de los siguientes determinantes:
(PAU)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a+1 & a & a & a \\ a & a+1 & a & a \\ a & a & a+1 & a \\ a & a & a & a+1 \end{vmatrix} \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix}$$

Solución:

CDet-17 Calcula el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

CDet-18

Solución:

CDet-19

Solución:

CDet-20

Solución:

CDet-21

Solución:

CDet-22

Solución:

CDet-23

Solución:

CDet-24

Solución:

CDet-25

Solución:

CDet-26

Solución:

CDet-27

Solución:

CDet-28

Solución:

CDet-29

Solución:

CDet-30

Solución:

CDet-31

Solución:

CDet-32

Solución: